م. الأولى فيزياء - السنة الأولى عام
ف ٢ فيزياء (٢) السبت ٥/٣/٢٠١٦
الحقل المتجهي ..

① المقادير الفيزيائية : تقسم المقادير الفيزيائية إلى نوعين :

أ - المقادير السلمية = وهي المقادير التي يعبر عنها بعدد و واحدة مثال عنها :
(V) الكمون الكهربائي - السعة الكهربائية (C) - درجة الحرارة - الحجم والضغط
(Volt) فاراد (F) $^\circ K$ أو $^\circ C$ (V) (m^3) (P) باسكال

ب - المقادير المتجهة = هي المقادير التي يعبر عنها بمتجهة بواحدة والتجهة لها

أربع عناصر هي :
1 - نقطة التأثير (بداية المتجهة)
2 - الاتجاه .
3 - الحامل .
4 - القيمة العددية .

مثال عنها = - الحقل الكهربائي $\vec{E}$ وواحدته (V/m) أو $\left(\frac{N}{Coulm}\right)$ $\frac{\text{نيوتن}}{\text{كولون}}$
- الحقل التحريضي المغناطيسي $\vec{B}$ وواحدته تسلا [T]
- القوة $\vec{F}$ وواحدتها النيوتن (N) .
- السطح $\vec{S}$ وواحدته (m^2) ... الخ .

② العمليات الرياضية على المتجهات :

1 - جداء عدد بمتجهة = ليكن لدينا المتجهة $\vec{A}$ والتي تعطى بالعلاقة $\vec{A} = A_x\hat{i} + A_y\hat{j} + A_z\hat{k}$ ،
والعدد a عندها جداء العدد بالمتجهة $\vec{A}$ يعطى بالعلاقة ،

$$a.\vec{A} = a.A_x\hat{i} + a.A_y\hat{j} + a.A_z\hat{k} = \vec{C} \quad \text{متجهة جديدة}$$

$$|\vec{C}| = |a.\vec{A}| = \sqrt{(a.A_x)^2 + (a.A_y)^2 + (a.A_z)^2} \quad \text{القيمة العددية}$$

وهنا نميز حالتين ،

1) $a > 0$ موجب $\Rightarrow$ $\vec{C}$ بنفس اتجاه $\vec{A}$

2) $a < 0$ سالب $\Rightarrow$ $\vec{C}$ بعكس اتجاه $\vec{A}$

2 - جمع متجهين = لیکن لدينا المتجهين التاليين =

$$\vec{A} = A_x\hat{i} + A_y\hat{j} + A_z\hat{k}$$

$$\vec{B} = B_x\hat{i} + B_y\hat{j} + B_z\hat{k}$$

إن حاصل جمع هاتين المتجهين هو متجه جديدة $= \vec{C}$

$$\vec{C} = \vec{A} + \vec{B} = (A_x\hat{i} + A_y\hat{j} + A_z\hat{k}) + (B_x\hat{i} + B_y\hat{j} + B_z\hat{k})$$

$$\vec{C} = (A_x + B_x)\hat{i} + (A_y + B_y)\hat{j} + (A_z + B_z)\hat{k}$$

$$\therefore \quad C_x = A_x + B_x \; ; \; C_y = A_y + B_y \; ; \; C_z = A_z + B_z$$

3 - طرح متجهين =

إن طرح المتجهين $\vec{B}$ من $\vec{A}$ هو متجه جديدة $\vec{D}$ كما في الشكل التالي

$$\vec{D} = \vec{A} - \vec{B} = (A_x - B_x)\hat{i} + (A_y - B_y)\hat{j} + (A_z - B_z)\hat{k}$$

$$\therefore \quad D_x = A_x - B_x \; ; \; D_y = A_y - B_y \; , \; D_z = A_z - B_z$$

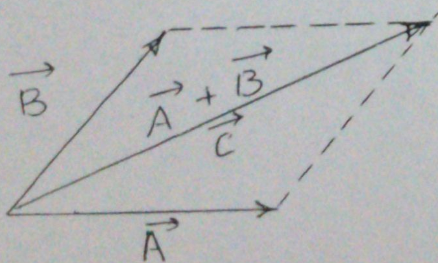
ملاحظة =

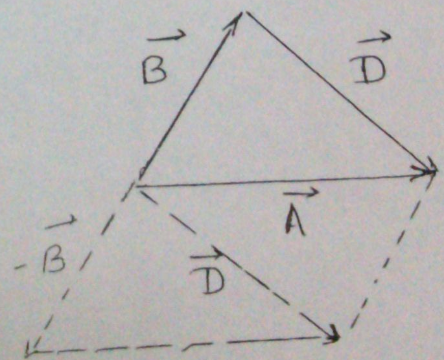
$$\vec{A} - \vec{B} = \vec{A} + (-\vec{B})$$

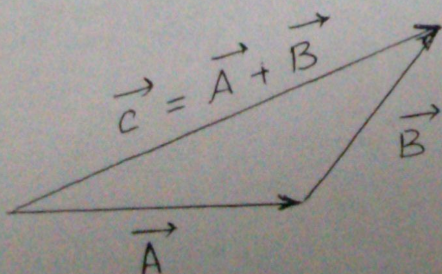
«عكس $\vec{B}$»

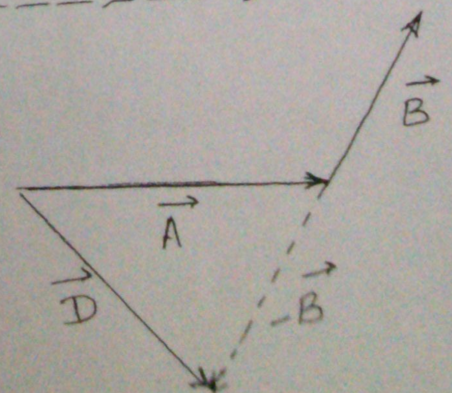
خاصية الطرح: $\boxed{\vec{A} - \vec{B} \neq \vec{B} - \vec{A}}$

«الجمع» «الطرح»









4 - جداء متجهين =

لدينا نوعين من الجداء =

① - الجداء الداخلي (السلمي): هو الجداء الذي يكون نتيجته عدد أو مقدار سلمي، مثال:

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = A_x \cdot B_x + A_y \cdot B_y + A_z \cdot B_z \quad \text{or} \quad \vec{A} \cdot \vec{B} = |\vec{A}| \cdot |\vec{B}| \cdot \cos\theta$$

حيث θ الزاوية الكائنة بين المتجهين $\vec{A}$ و $\vec{B}$.

من خواص هذا الجداء أنه: $\vec{A} \cdot \vec{B} = \vec{B} \cdot \vec{A}$

② - الجداء الخارجي (المتجهي)، هو بالتعريف:

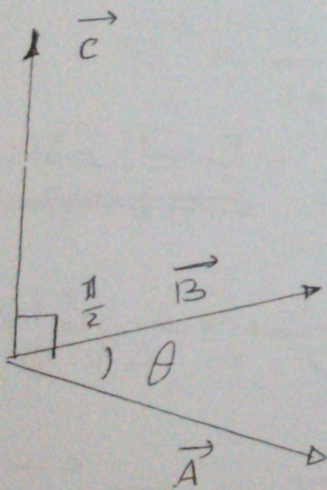
$$\vec{A} \times \vec{B} \text{ or } (\vec{A} \wedge \vec{B}) = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix} = \hat{i}\,[A_y \cdot B_z - A_z \cdot B_y] - \hat{j}\,[A_x \cdot B_z - A_z \cdot B_x] + \hat{k}\,[A_x B_y - A_y B_x] = \vec{C}$$

متجهة جديدة

$$\vec{C} = C_x \hat{i} + C_y \hat{j} + C_z \hat{k}$$

$C_x = (A_y \cdot B_z - A_z \cdot B_y)$; $C_y = A_z \cdot B_x - A_x \cdot B_z$; $C_z = A_x B_y - A_y B_x$

المتجهة $\vec{C}$ عمودية على المستوي الذي يحوي كلا من $\vec{A}$, $\vec{B}$



$$|\vec{A} \times \vec{B}| = |\vec{C}| = |\vec{A}| \cdot |\vec{B}| \cdot \sin\theta$$

حيث θ الزاوية المحصورة بين $\vec{A}$, $\vec{B}$.

③ - جداء متجهات الوحدة:

1/ $$\hat{i} \cdot \hat{i} = \hat{j} \cdot \hat{j} = \hat{k} \cdot \hat{k} = 1$$

لأنه:

$$\hat{i} \cdot \hat{i} = |\hat{i}| \cdot |\hat{i}| \cdot \cos\theta$$

$$\hat{i} \cdot \hat{i} = 1 \cdot 1 \cdot \cos 0 = 1$$

2/ $$\hat{i} \cdot \hat{j} = \hat{i} \cdot \hat{k} = \hat{j} \cdot \hat{k} = 0$$

لأنه:

$$\hat{i} \cdot \hat{j} = 1 \cdot 1 \cdot \cos\frac{\pi}{2} = 0$$

3- $\hat{i}\times\hat{i} = 0 \quad ; \quad \hat{j}\times\hat{j} = 0 \quad ; \quad \hat{k}\times\hat{k} = 0$

$\hat{i}\times\hat{i} = 1 . 1 . \sin 0 = 0$

لأن:

4- $\hat{i}\times\hat{j} = \hat{k} \quad ; \quad \hat{j}\times\hat{k} = \hat{i} \quad ; \quad \hat{k}\times\hat{i} = \hat{j}$

$\hat{j}\times\hat{i} = -\hat{k} \quad ; \quad \hat{k}\times\hat{j} = -\hat{i} \quad ; \quad \hat{i}\times\hat{k} = -\hat{j}$

لأن:

$$\hat{i}\times\hat{j} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = \hat{i}(0\times0 - 0\times1) - \hat{j}(1\times0 - 0\times0) + \hat{k}(1\times1 - 0\times0) = +\hat{k}$$

$$\hat{j}\times\hat{i} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = \hat{i}(1\times0 - 0\times0) - \hat{j}(0\times0 - 0\times1) + \hat{k}(0\times0 - 1\times1) = -\hat{k}$$

5- المؤثرات التفاضلية:

المؤثر التفاضلي عبارة عن عملية رياضية تدخل على المقادير السلمية أو المتجهة لتقوم بعملية تفاضلية جزئية وسنأ.

أ- المؤثر التدرج: $\overrightarrow{grad}$.

إن هذا المؤثر يدخل فقط على المقادير السلمية أي:

إذا كان لدينا مقدار سلمي (الكمون الكهربائي مثلاً) $U(x, y, z)$

$$\Rightarrow \overrightarrow{grad}\, U = \frac{\partial U}{\partial x}\hat{i} + \frac{\partial U}{\partial y}\hat{j} + \frac{\partial U}{\partial z}\hat{k}$$

$$: \quad (\overrightarrow{grad}\, U)_x = \frac{\partial U}{\partial x} \quad ; \quad (\overrightarrow{grad}\, U)_y = \frac{\partial U}{\partial y}$$

$$(\overrightarrow{grad}\, U)_z = \frac{\partial U}{\partial z}$$

مثال: ليكن: $\Phi = 2x^2yz + 4xyz$ أحسب $(\overrightarrow{grad}\,\Phi) = ?$

2- المؤثر التفرق = div.

إن هذا المؤثر يعمل فقط على المقادير المتجهة أي:

إذا كانت $\vec{A}$ متجهة فإن:

$$div \vec{A} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z} = \text{عدد}$$

مثال: ليكن $\vec{r}$ متجهة الموضع وساوي:

$$\vec{r} = x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}$$

أحسب $div \vec{r} = ?$

$$div \vec{r} = \frac{\partial r_x}{\partial x} + \frac{\partial r_y}{\partial y} + \frac{\partial r_z}{\partial z} = \frac{\partial x}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial z}$$

$$div \vec{r} = 1 + 1 + 1 = 3$$

3- المؤثر الدوراني = $\vec{rot}$ وهو مؤثر يعمل على المتجهات فإذا كانت لدينا متجهة $\vec{A}$ فإن:

$$\vec{rot}\,\vec{A} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ A_x & A_y & A_z \end{vmatrix} = \hat{i}\left[\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z}\right] - \hat{j}\left[\frac{\partial A_z}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial z}\right] + \hat{k}\left[\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y}\right]$$

4- المؤثر الفاضلي نبلا $\vec{\nabla}$: بالتعريف:

$$\vec{\nabla} = \frac{\partial}{\partial x}\hat{i} + \frac{\partial}{\partial y}\hat{j} + \frac{\partial}{\partial z}\hat{k}$$

وبالتالي:

$$\vec{grad}\,U = \vec{\nabla}\cdot U$$

$$div \vec{A} = \vec{\nabla}\cdot\vec{A}$$

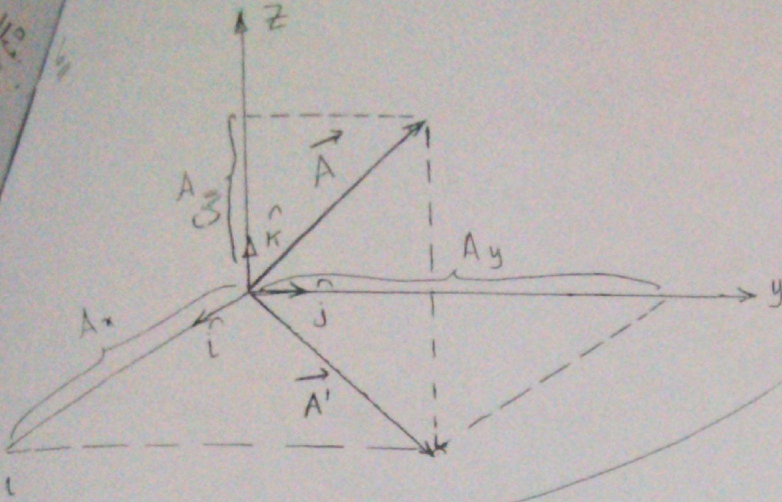
$$\vec{rot}\cdot\vec{A} = \vec{\nabla}\times\vec{A}$$

5- المؤثر اللابلاسي $\Delta = (\vec{\nabla})^2$

$$(\vec{\nabla})^2 = \vec{\nabla}\cdot\vec{\nabla} = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

فإذا دخل اللابلاسي على مقدار سلمي نتج عنه مقدار سلمي.

= = متجه = = = = = = متجه.



تمثيل متجهة $\vec{A}$ في الفراغ الثلاثي (الفضائي):

أمثلة ومسائل محلولة:

مثال ①: أوجد ناتج $\overrightarrow{rot}\,\overrightarrow{grad}\,u = ?$

② - أوجد ناتج $div\,\overrightarrow{grad}\,u = ?$ حيث u مقدار سلمي

الحل:

1)-
$$\overrightarrow{rot}\,\overrightarrow{grad}\,u = \vec{\nabla}\times\vec{\nabla}.u = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} & \frac{\partial u}{\partial z} \end{vmatrix} = \hat{i}\left[\frac{\partial^2 u}{\partial z\partial y} - \frac{\partial^2 u}{\partial z\partial y}\right] - \hat{j}\left[\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial z} - \frac{\partial^2 u}{\partial z\partial x}\right] + \hat{k}\left[\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y} - \frac{\partial^2 u}{\partial y\partial x}\right]$$

$$= \hat{i}(0) - \hat{j}(0) + \hat{k}(0)$$

$$\overrightarrow{rot}\,\overrightarrow{grad}\,u = 0$$

وهو المطلوب

2)-
$$div\,\overrightarrow{grad}\,u = \vec{\nabla}.\vec{\nabla}u = \left(\frac{\partial}{\partial x}\hat{i} + \frac{\partial}{\partial y}\hat{j} + \frac{\partial}{\partial z}\hat{k}\right).\left(\frac{\partial u}{\partial x}\hat{i} + \frac{\partial u}{\partial y}\hat{j} + \frac{\partial u}{\partial z}\hat{k}\right)$$

$$= \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right) = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$$

$$\therefore div\,\overrightarrow{grad}\,u = \nabla^2 u = \text{عدد}$$

وهو المطلوب

3)
$$div\,\overrightarrow{rot}\vec{A} = ? = \vec{\nabla}.(\vec{\nabla}\times\vec{A}) = \left(\frac{\partial}{\partial x}\hat{i} + \frac{\partial}{\partial y}\hat{j} + \frac{\partial}{\partial z}\hat{k}\right).$$

$$.\left\{\hat{i}\left[\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z}\right] - \hat{j}\left[\frac{\partial A_z}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial z}\right] + \hat{k}\left[\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y}\right]\right\}$$

$$= \frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z}\right] - \frac{\partial}{\partial y}\left[\frac{\partial A_z}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial z}\right] + \frac{\partial}{\partial z}\left[\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y}\right]$$

$$= \frac{\partial^2 A_z}{\partial x\partial y} - \frac{\partial^2 A_y}{\partial x\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial y\partial x} + \frac{\partial^2 A_x}{\partial y\partial z} + \frac{\partial^2 A_y}{\partial z\partial x} - \frac{\partial^2 A_x}{\partial z\partial y}$$

$$= 0 \qquad \therefore div\,\overrightarrow{rot}\vec{A} = 0$$

7 // مثال : إذا كان شعاع الموضع $\vec{r}$ يعطى بالعلاقة

$$\vec{r} = x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}$$

أحسب : $\overrightarrow{rot}\,\vec{r} = ?$, $div\,\vec{r} = ?$; $\overrightarrow{grad}\,r$

$\overrightarrow{grad}\,\frac{1}{r} = ?$

$\overrightarrow{grad}\,(r)^n = ?$ من أجل $n = 1, 2, 3, \dots$

$n = -1, -2, -3, \dots$

الحل =

1] =
$$\overrightarrow{rot}\,\vec{r} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ x & y & z \end{vmatrix} = \hat{i}\left[\frac{\partial z}{\partial y} - \frac{\partial y}{\partial z}\right] - \hat{j}\left[\frac{\partial z}{\partial x} - \frac{\partial x}{\partial z}\right] + \hat{k}\left[\frac{\partial y}{\partial x} - \frac{\partial x}{\partial y}\right]$$
$$= 0 - 0 + 0 = 0$$

2] .
$$\overrightarrow{grad}\,r = \vec{\nabla}\cdot(x^2+y^2+z^2)^{1/2} = \frac{\partial}{\partial x}(x^2+y^2+z^2)^{1/2}\hat{i} + \frac{\partial}{\partial y}(x^2+y^2+z^2)^{1/2}\hat{j} + \frac{\partial}{\partial z}(x^2+y^2+z^2)^{1/2}\hat{k}$$

$$\frac{\partial}{\partial x}(x^2+y^2+z^2)^{1/2} = \frac{1}{2}(2x)(x^2+y^2+z^2)^{1/2-1} = x(x^2+y^2+z^2)^{\frac{1-2}{2}}$$
$$= x(x^2+y^2+z^2)^{-1/2} = x/(x^2+y^2+z^2)^{1/2} = \frac{x}{r}$$

$$\therefore \overrightarrow{grad}\,r = \frac{x}{r}\hat{i} + \frac{y}{r}\hat{j} + \frac{z}{r}\hat{k} = \frac{1}{r}(x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{n}) = \frac{\vec{r}}{r}$$

3]
$$\overrightarrow{grad}(r)^n = \vec{\nabla}\cdot(x^2+y^2+z^2)^{n/2} = \frac{\partial}{\partial x}(x^2+y^2+z^2)^{n/2}\hat{i} + \frac{\partial}{\partial y}(x^2+y^2+z^2)^{n/2} + \frac{\partial}{\partial z}(x^2+y^2+z^2)^{n/2}$$

$$\frac{\partial}{\partial x}(x^2+y^2+z^2)^{n/2} = \frac{n}{2}(2x)(x^2+y^2+z^2)^{\frac{n}{2}-1}$$
$$= n.x\,(x^2+y^2+z^2)^{\frac{n-2}{2}} = n.x\,(x^2+y^2+z^2)^{(n-2)/2}$$
$$= n.x.r^{(n-2)}$$

$$\therefore \overrightarrow{grad}(r)^n = n.x\,r^{(n\ 2)}\hat{i} + n.y\,r^{(n-2)}\hat{j} + n.z\,r^{(n-2)}\hat{k}$$

$$\boxed{\overrightarrow{grad}(r)^n = n.\vec{r}.r^{(n-2)}}$$

مثلاً : $n = 1$ نجد :

$$\overrightarrow{grad}\,r = (1).\vec{r}.(r)^{(1-2)}$$
$$= \vec{r}.r^{-1} = \frac{\vec{r}}{r}$$

4]
$$\overrightarrow{grad}\,\frac{1}{r} = \overrightarrow{grad}(r)^{-1} = (-1)(\vec{r}).(r)^{(-1-2)}$$
$$= -\vec{r}.r^{-3} = -\frac{\vec{r}}{r^3}$$